

CURSO : MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 10 / 04 / 2002

TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #1

1.-

a) Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Pruebe que $\forall x, y, z, w \in X$,

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

ii) Deduzca que $\forall x, y, z \in X$

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z).$$

b) Sea (X, d) un espacio métrico y d^* definida por:

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in X$$

i) Muestre que d^* es métrica.

ii) Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea $a \in X$. Pruebe que $x_k \rightarrow a$ en (X, d) ssi $x_k \rightarrow a$ en (X, d^*) .

2.-

I.-

a) Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n y una matriz no singular P de $n \times n$, demuestre que la función $\|x\|_p = \|Px\|$ es norma en \mathbb{R}^n

b) Demuestre que en \mathbb{R}^2 , la función $\|x\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right]^{1/2}$ es una norma. Haga un dibujo de $B((0,0);1)$.

II.-

Sean $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n y F un s.e.v de E .

a) Demostrar que:

$$B[0,1] \subseteq F \Rightarrow F = E$$

Indicación: Suponga que $F \subsetneq E \Rightarrow \exists x_0 \in E, x_0 \neq 0$ con $x_0 \notin F$

b) Demostrar

i) $rB[0,1] = B[0,r]$ con $r > 0$

ii) $B[a,r] + b = B[a+b,r]$ con $r > 0$

donde $rA = \{ra / a \in A\}$ $A + b = \{a + b / a \in A\}$

Indicación: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

3.- Considerar en el espacio $C([0,1])$ la métrica:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Analizaremos la completitud del espacio. Para ello considere la siguiente sucesión:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ kx & \text{si } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Determine el límite puntual de la sucesión
 - Demuestre que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
 - ¿ $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Converge en $C([0,1])$? Es $C([0,1])$ con la métrica $d(f,g)$ completo?. Justifique
 - ¿Es $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en el espacio $C([0,1])$ con la métrica uniforme
- $d'(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$? Justifique

Control #1

1-

a) (X, d) espacio métrico

$$i) \text{ PDQ } |d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, w) + d(w, z)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w) + d(w, z) - d(z, w)$$

$$(1) \quad d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w)$$

$$\text{Además } d(z, w) - d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, w) \Rightarrow d(x, y) - d(z, w) \geq - (d(x, z) + d(y, w)) \quad (2)$$

$$\therefore (1), (2) \Rightarrow |d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

$$ii) \text{ PDQ } |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

$$\text{Sabemos por i) que: } |d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$$

$$\text{Sea } w = y$$

$$\Rightarrow |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z) + \cancel{d(y, y)}$$

$$\Rightarrow |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

Control #1

1-

b) i) d' es métrica

$$\bullet d'(x, y) = d'(y, x)$$

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = d'(y, x)$$

$$\bullet d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\Rightarrow d'(x, y) = 0 \Rightarrow \min\{1, d(x, y)\} = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\Leftarrow x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow \min\{1, 0\} = 0 \Rightarrow d'(x, y) = 0$$

$$\bullet d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$$

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad \text{Analizando por casos se prueba que:}$$

$$\leq \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(z, y)\}$$

$$\leq d'(x, z) + d'(z, y) \quad \therefore d'(x, y) \text{ es métrica}$$

ii) $\{x_k\} \in X \quad a \in X$

$$\text{P.D.Q. } x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d) \Leftrightarrow x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d')$$

$$\Rightarrow \text{Si } x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0, k > k_0 \quad d(x_k, a) < \varepsilon$$

$$d'(x_k, a) = \min\{1, d(x_k, a)\} = d(x_k, a) < \varepsilon \quad \text{si } d(x_k, a) > 1 \quad (\varepsilon > 1) \\ \Rightarrow d'(x_k, a) = 1 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d')$$

$$\Leftarrow \text{Si } x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d') \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad d'(x_k, a) < \varepsilon$$

$$\text{Pero } d'(x_k, a) = \min\{1, d(x_k, a)\}$$

$$\text{Si } d'(x_k, a) = 1 \Rightarrow d(x_k, a) < 1 \Rightarrow \text{Si } d'(x_k, a) = 1 < \varepsilon \Rightarrow d(x_k, a) < \varepsilon$$

$$\text{Si } d'(x_k, a) < \varepsilon < 1 \Rightarrow d(x_k, a) < \varepsilon < 1$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad d(x_k, a) < \varepsilon \Rightarrow x_k \rightarrow a \text{ en } (X, d)$$

Control #1

2-I

a) $\|X\|_p = \|Px\|$ es norma

- $0 \leq \|X\|_p < +\infty$

- $\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$$\Leftrightarrow X = 0 \Rightarrow Px = 0 \Rightarrow \|Px\| = 0$$

$$\Rightarrow \|X\|_p = 0 \Rightarrow \|Px\| = 0 \Rightarrow Px = 0 \text{ } P \text{ es no singular}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } P = \{0\} \Rightarrow X = 0$$

- $\|\lambda \cdot X\|_p = \|\lambda Px\| = \|\lambda \cdot Px\| = |\lambda| \cdot \|Px\| = |\lambda| \cdot \|X\|_p$

- $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$$\|x+y\|_p = \|P(x+y)\| = \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

b) $\|X\|_e = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right)^{1/2}$

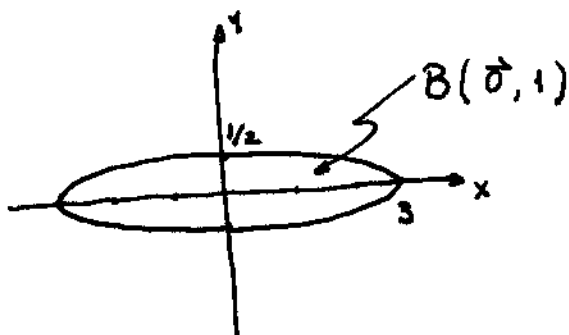
Consideremos la matriz $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y la norma euclídea.

$$\|X\|_e = \left\| \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|_2$$

Por a) $\|X\|_e$ es norma.

$$B((0,0); 1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (0,0)\|_e < 1 \}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + 4y^2 < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1/4} < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} < 1$$



Control #1

2. II

a) PDQ $B[0,1] \subseteq F \Rightarrow F=E$

Por contradicción

Supongamos que $F \subsetneq E \Rightarrow \exists x_0 \in E, x_0 \neq 0 / x_0 \notin F$

Es claro que $\frac{x_0}{\|x_0\|} \notin F$ (si así fuera $\frac{x_0}{\|x_0\|} \in F \Rightarrow \|x_0\| \cdot \frac{x_0}{\|x_0\|} \in F \rightarrow x_0 \in F$)

Pero $\left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| = \frac{1}{\|x_0\|} \cdot \|x_0\| = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{\|x_0\|} \in B[0,1] \subseteq F \Rightarrow x_0 \in F$

$\therefore F=E$

b) i) PDQ $r > 0, rB[0,1] = B[0,r]$

\Rightarrow Sea $x \in rB[0,1] \Rightarrow \exists y \in B[0,1], ry = x \Rightarrow \|x\| = \|r \cdot y\|$

$\Rightarrow \|x\| = r \cdot \|y\| \leq r \cdot 1 \Rightarrow x \in B[0,r]$

\Leftarrow Sea $x \in B[0,r] \Rightarrow \|x\| \leq r \Rightarrow \frac{1}{r} \|x\| \leq 1$

$\Rightarrow \left\| \frac{x}{r} \right\| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot x \in B[0,1] \Rightarrow \exists y \in B[0,1], y = \frac{1}{r} x$

$\Rightarrow x = r \cdot y \Rightarrow x \in rB[0,1]$

ii) PDQ $r > 0, B[a,r] + b = B[a+b,r]$

\Rightarrow Sea $x \in B[a,r] + b \Rightarrow \exists y \in B[a,r], x = y + b$

$\Rightarrow x - a = y + b - a \Rightarrow x - a - b = y - a$

$\Rightarrow \|x - (a+b)\| = \|y - a\| \leq r \Rightarrow x \in B[a+b,r]$

\Leftarrow Sea $x \in B[a+b,r], y = x - b \Rightarrow \|y - a\| = \|x - (a+b)\| \leq r$

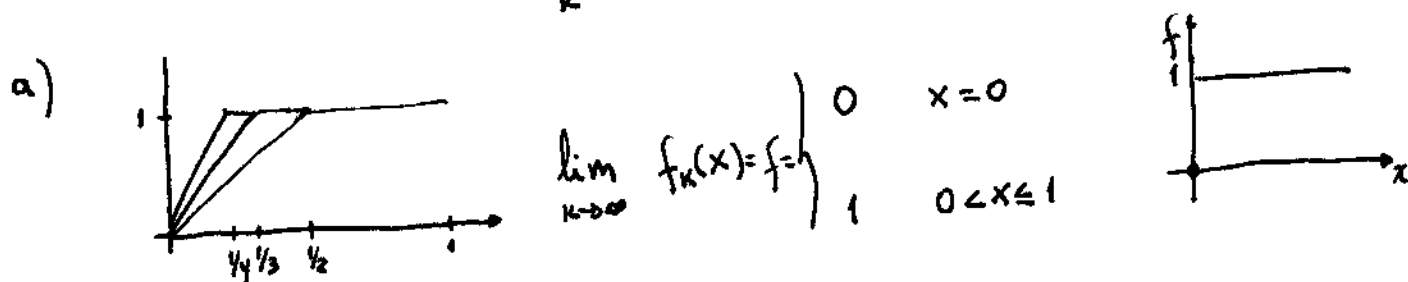
$\Rightarrow y \in B[a,r] \text{ con } x = y + b$

$\therefore x \in B[a,r] + b$

Control #1

3-

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ kx & 0 < x < \frac{1}{k} \\ 1 & \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



b) P.D.Q

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} / \forall m, n \geq k_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \varepsilon$$

En efecto, suponemos $m \geq n$

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= \int_0^{1/m} (mx - nx) dx + \int_{1/m}^{1/n} (1 - nx) dx + \int_{1/n}^1 (1 - 1) dx \\ &= \left(\frac{m-n}{2} \right) \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(f_m, f_n) = 0$$

$\Rightarrow \{f_k(x)\}$ es sucesión de Cauchy en $C[0,1]$

c) Pero $f_k(x) \rightarrow f$ con la métrica d , pero $f \notin C[0,1]$

$C[0,1]$ con la métrica d no es completo, ya que $f_k(x)$ es de Cauchy y no converge en $C[0,1]$.

d) Sabemos que $C[0,1]$ es completo con la métrica uniforme. Por lo tanto toda sucesión de Cauchy en $C[0,1]$ converge en $C[0,1]$. Como f es el candidato a límite y $f \notin C[0,1]$ entonces $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy.